COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

EXERCICE I

Soient X et Y deux variables aléatoires suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (n, θ) et (m, θ), où $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ sont des entiers connus et où $\theta \in]0, 1[$ est inconnu.

1. *a.* Que vaut l'espérance de X ? En déduire un estimateur de θ de la forme $f(X)$.

   b. Montrer qu'il existe un unique estimateur sans biais de θ de la forme $f(X)$.

2. On appelle mode d'une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, tout entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(Z = k) \geqslant P(Z = i)$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

   a. Pour $k \in \{1, \ldots, m\}$, calculer :
   $$\frac{P(Y = k)}{P(Y = k - 1)}.$$

   b. Déterminer le (ou les) mode(s) de Y.

3. On cherche à prédire la valeur de Y à partir d'une observation x de X. Proposer une valeur dans le cas où X et Y sont indépendantes ; proposer une valeur dans le cas où $Y = X$.

EXERCICE II

On rappelle la formule suivante : pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x + y) + \sin(x - y)).$$

1. *a.* Pour tout entier $k \geqslant 1$, calculer : $\displaystyle\int_0^\pi t \cos kt \, dt$ et $\displaystyle\int_0^\pi t^2 \cos kt \, dt$.

   b. Trouver deux réels a et b tels que pour tout entier $k \geqslant 1$, on ait :
   $$\int_0^\pi (at + bt^2) \cos kt \, dt = \frac{1}{k^2}.$$

2. Montrer que l'application $\varphi : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par les relations :
   $$\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{1}{2}\left(-t + \dfrac{t^2}{2\pi}\right)\dfrac{1}{\sin\dfrac{t}{2}} & \text{si} \quad t \in]0, \pi], \\ \varphi(0) = -1, \end{cases}$$
   est continûment dérivable sur $[0, \pi]$, c'est-à-dire de classe C^1.

3. *a.* Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :
   $$\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) \sin\frac{t}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2n + 1}{2} t - \sin\frac{t}{2}\right).$$

   b. Montrer que pour tout $t \in [0, \pi]$ et pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :
   $$\left(-t + \frac{t^2}{2\pi}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \cos kt\right) = \varphi(t)\left(\sin\frac{2n + 1}{2} t\right) + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi}.$$

   c. Montrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \int_0^\pi \varphi(t)\left(\sin\frac{2n + 1}{2} t\right) dt + \frac{\pi^2}{6}$.

   d. Quelle est la somme de la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$?

EXERCICE III

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on notera $\mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre k à coefficients réels et $I_k \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$ la matrice identité.

On rappelle que si $\lambda = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, est une valeur propre complexe non réelle de $M \in \mathscr{M}_k(\mathbb{R})$, il en est de même du conjugué $\bar{\lambda} = a - ib$ de λ.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $n \geqslant 1$ un entier.

   a. On suppose que $+1$ ou -1 est une valeur propre de M. Montrer que $+1$ est une valeur propre de M^{2n}.

   b. On suppose que M a une valeur propre complexe λ non réelle. Montrer que M est diagonalisable dans l'ensemble $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes ; en déduire que $+1$ est une valeur propre de M^{2n} si et seulement si $M^{2n} = I_2$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que cette relation soit vérifiée.

2. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $A = (a_{i,j}) \in M_{4n}(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

définie par les égalités :

- si $i \in \{2, \ldots, 4n-1\}$ est pair,
$$a_{i,i-1} = -1, \quad a_{i,i+1} = +1, \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{i-1, i+1\};$$
- si $i \in \{2, \ldots, 4n-1\}$ est impair,
$$a_{i,i-1} = +1, \quad a_{i,i+1} = -1, \quad a_{i,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{i-1, i+1\};$$
- $a_{1,2} = -1, \quad a_{1,4n} = +1, \quad a_{1,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{2, 4n\}$;
- $a_{4n,1} = +1, \quad a_{4n,4n-1} = -1, \quad a_{4n,j} = 0 \quad \text{si} \quad j \notin \{1, 4n-1\}$.

   a. Pour toute valeur propre réelle μ de A, on notera $E_\mu \subset \mathbb{R}^{4n}$ l'espace propre associé. Montrer que $(x_1, \ldots, x_{4n}) \in E_\mu$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, 2n\}$,

$$\begin{pmatrix} x_{2i+1} \\ x_{2i+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1-\mu^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{2i-1} \\ x_{2i} \end{pmatrix}.$$

   (Dans cette formule, on pose par convention $x_{4n+1} = x_1$ et $x_{4n+2} = x_2$.)

   b. Pour tout réel μ, on pose : $M_\mu = \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ -\mu & 1-\mu^2 \end{pmatrix}$.

   Montrer que le réel μ est une valeur propre de A si et seulement si $+1$ est une valeur propre de M_μ^{2n}.

   c. Déterminer les valeurs propres réelles μ de A telles que M_μ ait une valeur propre complexe non réelle. Quelle est la dimension de E_μ ?

   (On rappelle que $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.)

   d. Déterminer la (ou les) valeur(s) propre(s) réelle(s) μ de A telle(s) que $+1$ soit une valeur propre de M_μ. Même question pour -1. Dans chacun des cas, indiquer la dimension de E_μ.

   e. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_{4n}(\mathbb{R})$?